Karlstads universitet
Avdelningen för matematik

Tentamen i matematik, Analys B1, 5 poäng,
för MAB 201, MAB 103 och MAB 104. 2006-03-27 kl. 8.15-13.15
Ansvarig lärare: Niclas Bernhoff (2024). Max: 24p VG: 18p G: 12p
Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.
MOTIVERA DINA LÖSNINGAR NOGGRANT.

SYMBOLHANTERANDE MINIRÄKNARE ÄR FÖRBJUDET!

1. a) Låt **F** vara ett glatt (smooth) vektorfält definierat på ett område D. **(2p)**
   Visa att om $\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje styckvis glatt, sluten kurva C_0 i D, så är $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen, dvs. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ beror bara på startpunkten P_0 och slutpunkten P_1 och inte på (den styckvis glatta) kurvan C.

   b) Hur lång är kurvan som ges av $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ? **(1p)**

2. Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2y^2}{3x^2 + y^2}$.

   a) Bestäm om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar. Ange i så fall också dess värde. **(1p)**

   b) Bestäm $f'_x(-1,1)$ och $f'_y(-1,1)$. **(1p)**

   c) Bestäm riktningsderivatan $\dfrac{df}{ds}$ för $f = f(x,y)$, i punkten $(-1,1)$ med avseende på riktningen $(3,-4)$. **(1p)**

3. Beräkna dubbelintegralen **(2.5p)**

$$\iint_E \frac{1}{1+x+y}\, dxdy,$$

   då E är triangeln med hörn i $(1,-1)$, $(2,-1)$ och $(2,-2)$.

4. Visa att **(3p)**

$$x f''_{xy} + f''_{yy} = f''_{uv},$$

   om $u = \ln x$ och $v = y - \ln x$ (för $x > 0$).

5. Ekvationen $xz^3 - x^3y^2 + yz = 0$ definierar nära punkten $(1,-2,2)$, z som en funktion av x och y, $z = f(x,y)$. Motivera varför och bestäm också $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-2)} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$. **(1.5p)**

var god vänd

6. Beräkna linjeintegralen $\int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ för vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2ze^{x^3}, y, e^{x^3})$ **(3p)**

längs kurvan C med parameterframställningen $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

7. a) Beräkna volymen av den kropp som innesluts av sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ och konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$. **(2.5p)**

   b) Bestäm arean av den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ som ligger inuti konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$. **(2.5p)**

8. a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = xy$ i punkten (a,b,c). **(1p)**

   b) Tangentplanet skär z-axeln i punkten $(0,0,w)$. Bestäm största och minsta värdet av w då $|a|+|b| \le 2$. **(2p)**

Lycka till!