Karlstads universitet
Avdelningen för matematik

Tentamen i matematik, Analys B1, 5 poäng,
för MAB 201, MAB 103 och MAB 104. 2006-04-29 kl. 9.00-14.00
Ansvarig lärare: Niclas Bernhoff (2024). Max: 24p VG: 18p G: 12p
Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.
MOTIVERA DINA LÖSNINGAR NOGGRANT.

SYMBOLHANTERANDE MINIRÄKNARE ÄR FÖRBJUDET!

1. Härled ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten (a, b). **(3p)**

2. Låt $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x - 1}$, ($x \neq 1$).

   a) Bestäm om gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y)$ existerar. Ange i så fall också dess värde. **(1p)**

   b) Bestäm riktningsderivatan $\dfrac{df}{ds}$ för $f = f(x, y)$, i punkten $(2, -1)$ med avseende på riktningen $(2, 1)$. **(1.5p)**

   c) I vilken riktning (utifrån punkten $(2, -1)$) avtar funktionen som snabbast? **(0.5p)**

   d) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $z = f(x, y)$ kring punkten $(x, y) = (2, -1)$. **(1.5p)**

3. Bestäm största och minsta värdet för funktionen **(3p)**

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 + 6y$$

   på den slutna triangelytan med hörn i $(-1, 0)$, $(-1, 4)$ och $(3, 0)$.

4. Beräkna trippelintegralen **(3p)**

$$\iiint\limits_T \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dxdydz,$$

   där $T = \left\{(x, y, z);\ \dfrac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi,\ x, y, z > 0\right\}$.

5. Transformera differentialekvationen **(2.5p)**

$$x g''_{tx} + 2x^2 g''_{tt} + g'_t = x^2,\ (x > 0,\ t > x^2),$$

   genom att införa de nya variablerna $\begin{cases} u = x \\ v = t - x^2 \end{cases}$ (dvs. uttryck differentialekvationen med hjälp av de nya variablerna u och v).

6. Beräkna dubbelintegralen **(3p)**

$$\iint\limits_D \left(x^2 - y^2\right) \sin\left(x + y\right)\ dxdy,$$

   där D är triangeln med hörn i $(-2, 0)$, $(0, 2)$ och $(2, 0)$. Ledning: Kan underlätta att först göra en lämplig substitution.

var god vänd

7. Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för vektorfältet **(2.5p)**

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + 2xz^2, x + y + 2yz, y^2 + 2x^2z),$$

där C är den räta linjen från punkten $A = (2, 1, 2)$ till punkten $B = (1, 0, 3)$.

8. Bestäm flödet $\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, z^2)$ ut genom ytan S given av $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. **(2.5p)**

Lycka till!