## INSTUDERING LOGIK FÖR DATALOGER DELTENTAMEN 2

**Kan vara till hjälp:** $\neg \exists y\, Q(c, y)$ betyder samma sak som $\neg ( \exists y\, Q(c, y) )$
(Alltså *inte* detsamma som $\exists y\, \neg Q(c, y)$ )

**(TEORI-UPPGIFTER PREDIKATLOGIK SPARAS TILL DEL 3)**

**Följande uppgiftstyper kan förekomma på tentamen 2006-02-22**

---

**1)** Visa $\models_{V_M} \alpha$

Innebörd: $V_M(\alpha) =$ S
Alt. formulering: $\alpha$ är sann i $V_M$ , $V_M$ är en modell av $\alpha$

Metod: Packa upp formeln $\alpha$ över den givna M.
Avgör sanningsvärdet m.hj.a. den givna $V_M$ .

Löst exempel: Kompendiet sid 18; Ex. 8-2.5 1)

---

**2)** Visa $\not\models_{V_M} \alpha$

Innebörd: $V_M(\alpha) =$ F
Alt. formulering: $\alpha$ är falsk i $V_M$ , $V_M$ är inte en modell av $\alpha$

Metod: Packa upp formeln $\alpha$ över den givna M.
Avgör sanningsvärdet m.hj.a. den givna $V_M$ .

Löst exempel: Kompendiet sid 18; Ex. 8-2.5 2)

---

**1+2)** Mer träning: Första-uppgifterna på gamla deltentor

---

**3)** Visa $\models \alpha$

Innebörd: $\alpha$ är logiskt sann (tautologi)
Alt. formulering: $V_M(\alpha) =$ S för alla möjliga $V_M$ , Det finns ingen $V_M$ där $V_M(\alpha) =$ F

Metod: Motsägelsebevis:
Antag motsatsen; att det finns en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) =$ F

3,forts) Följ villkoren på utdelat blad (sid 222)
tills du når motsägelse.

Slutsats: Antagandet var felaktigt; det finns ingen värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = F$.
Alltså gäller $\models \alpha$

Löst exempel: Kompendiet sid 18; Ex. 8-3.4 .
MÅNGA övningar finns att tillgå, även på gamla tentor

---

**4)** Visa $\not\models \alpha$

Innebörd: $\alpha$ är *inte* logiskt sann
Alt. formulering: Det finns $V_M$ där $V_M(\alpha) = F$

Metod: Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = F$

(Om du inte lyckas; börja om enligt följande:
Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b, c \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = F$ )

Löst exempel: Kompendiet sid 19; Ex. 8-3.6 .
MÅNGA övningar finns att tillgå, även på gamla tentor

---

**5)** Visa $\alpha$ satisfierbar

Innebörd: Det finns $V_M$ där $V_M(\alpha) = S$

Metod: Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = S$

(Om du inte lyckas; börja om enligt följande:
Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b, c \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = S$ )

Löst exempel: Kompendiet sid 20; Ex. 8-3.8 .
På gamla tentor finns fler uppgifter att träna på.

**6)** Visa $\alpha$ logiskt falsk (kontradiktion)

Innebörd: $V_M(\alpha) = F$ för alla möjliga $V_M$ ,
Det finns ingen $V_M$ där $V_M(\alpha) = S$, dvs $\alpha$ är inte satisfierbar

Metod: Motsägelsebevis:
Antag motsatsen; att det finns en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = S$
Följ villkoren på utdelat blad (sid 222)
tills du når motsägelse.

Slutsats: Antagandet var felaktigt; det finns ingen värdering $V_M$ där $V_M(\alpha) = S$.
Alltså gäller att $\alpha$ är logiskt falsk,

Löst exempel: Kompendiet sid 20; Ex. 8-2.11 .
På gamla tentor finns fler uppgifter att träna på

---

**7)** Visa $\alpha$ kontingent

Innebörd: $\alpha$ är varken logiskt falsk eller logiskt sann
Alt. formulering: Det finns minst en värdering $V_{M1}$ där $V_{M1}(\alpha) = S$
och dessutom minst en värdering $V_{M2}$ där $V_{M2}(\alpha) = F$

Metod: 1) Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_{M1}$ där $V_{M1}(\alpha) = S$

(Om du inte lyckas; börja om enligt följande:
Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b, c \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_{M1}$ där $V_{M1}(\alpha) = S$ )

2) Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_{M2}$ där $V_{M2}(\alpha) = F$

(Om du inte lyckas; börja om enligt följande:
Hitta på en objektdomän $M = \{ a , b, c \}$
Packa upp formeln $\alpha$ över M.

"Pussla ihop" en värdering $V_{M2}$ där $V_{M2}(\alpha) = F$ )

På gamla tentor finns några uppgifter att träna på.

**F1)** Uppgiftstyp 1, fast formel med fria variabler. Kan dock ej avgöras !
*Men* med givna värden istället för variablerna kan det avgöras.

**F3)** Uppgiftstyp 3, fast formel med fria variabler.
Man avgör med hjälp av formelns *tillslutning*. (Se kompendiet sid 16 , övre halvan)

---

**8)** Visa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$

Innebörd: $\beta$ är en semantisk implikation av $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$
Alt. formulering: $V_M(\beta) = S$ för alla $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$
Det finns ingen värdering $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$ men $V_M(\beta) = F$

Metod: Motsägelsebevis:
Antag motsatsen; att det finns en värdering $V_M$
där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$ men $V_M(\beta) = F$
Följ villkoren på utdelat blad (sid 222)
tills du når motsägelse.

Slutsats: Antagandet var felaktigt; det finns ingen värdering $V_M$
där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$ men $V_M(\beta) = F$
Alltså gäller $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$

Löst exempel: Kompendiet sid 21; Ex. 9-1.4 .
MÅNGA övningar finns att tillgå, även på gamla tentor

---

**9)** Visa $\alpha = \Vert\!\!= \beta$

Innebörd: $\alpha$ och $\beta$ är logiskt ekvivalenta
Alt. formulering: $\alpha \models \beta$ och $\beta \models \alpha$

Metod: 1) Visa $\alpha \models \beta$ (uppgiftstyp 8)

2) Visa $\beta \models \alpha$ (uppgiftstyp 8)

Löst exempel: Kompendiet sid 21; Ex. 9-1.4 .
MÅNGA övningar finns att tillgå, även på gamla tentor

**10)** Visa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \not\models \beta$

Innebörd: $\beta$ är *inte* en semantisk implikation av $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$
Alt. formul. Det finns $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$ men $V_M(\beta) = F$

Metod: Hitta på en objektdomän M = { a , b }
Packa upp formlerna $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$
men $V_M(\beta) = F$

( Om du inte lyckas; börja om enligt följande:
Hitta på en objektdomän M = { a , b, c }
Packa upp formlerna $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$
men $V_M(\beta) = F$ )

Löst exempel: Kompendiet sid 21; Ex. 9-1.9 .
Här finns övningar att tillgå, även på gamla tentor

---

**11)** Visa $\alpha \not\Leftrightarrow \beta$ (printed as α <≠> β)

Innebörd: $\alpha$ och $\beta$ är *inte* logiskt ekvivalenta

Metod: Det räcker att visa att *antingen* $\alpha \not\models \beta$ (uppgiftstyp 10)
*eller* $\beta \not\models \alpha$ (uppgiftstyp 10)

---

**F8)** Uppgiftstyp 8, fast formel med fria variabler.
Metod: Se kompendiet sid 17, överst.

**F9)** Uppgiftstyp 9, fast formel med fria variabler.
Metod: Se kompendiet sid 17, överst.

**12)** Visa att en teori(=en mängd formler) $\Delta = \{ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \}$ är konsistent.

Innebörd: Det finns $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$

Metod: Hitta på en objektdomän M = { a , b }
Packa upp formlerna $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$

(Om du inte lyckas; börja om enligt följande:
Hitta på en objektdomän M = { a , b, c }
Packa upp formlerna $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ över M.
"Pussla ihop" en värdering $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$ )

Löst exempel: Kompendiet sid 24; Ex. 9-5.6, Övn 9-7.11
På gamla tentor finns någon uppgift att träna på

---

**13)** Visa att en teori(=en mängd formler) $\Delta = \{ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \}$ är inkonsistent.

Innebörd: Det finns ingen $V_M$ där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$

Metod: Motsägelsebevis:
Antag motsatsen; att det finns en värdering $V_M$
där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$
Följ villkoren på utdelat blad (sid 222)
tills du når motsägelse.

Slutsats: Antagandet var felaktigt; det finns ingen värdering $V_M$
där $V_M(\alpha_1) = V_M(\alpha_2) = \ldots = V_M(\alpha_n) = S$
Alltså gäller att $\{ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \}$ är inkonsistent

---

**K)** Många av uppgiftstyperna ovan kan förekomma med *konstanter*

Exempel finns även på gamla tentor

---

**Uppgiftstyp som *inte* ingår: ÖVNINGAR typ 9-7.5**

**14)** Att skriva om en predikatlogisk formel till Prenex Normal Form (PNF)

Du får då använda de markerade formlerna på utdelad lista över PK-regler

Löst exempel: Se följande blad (uppgift från tentamen 2000-02-14)
På gamla tentor finns fler uppgifter att träna på.

**Från tentamen 2000-02-14:**

**Uppgift 3.** Skriv på prenex normalform. Endast bifogade PK-regler får användas. **(3p)**

$$\forall x\,(P(x)\rightarrow\exists y\,Q(x,y)) \wedge (\forall z\,R(x,z)\rightarrow P(x))$$

Så här kan er lösning se ut (Ni behöver ju inte ge alla kommentarer) :

$\forall x\,(P(x)\rightarrow\exists y\,Q(x,y)) \wedge (\forall z\,R(x,z)\rightarrow P(x))$

PK 30

$\forall x\,\mathbf{\exists y}\,(P(x)\rightarrow Q(x,y)) \wedge (\forall z\,R(x,z)\rightarrow P(x))$

PK 27

$\forall x\,\exists y\,(P(x)\rightarrow Q(x,y)) \wedge \mathbf{\exists z}\,(R(x,z)\rightarrow P(x))$

PK 4

$\mathbf{\forall w}\,\exists y\,(P(\mathbf{w})\rightarrow Q(\mathbf{w},y)) \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))$

PK 24'

$\mathbf{\forall w}\,\mathbf{(}\,\exists y\,(P(w)\rightarrow Q(w,y)) \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))\,\mathbf{)}$

PK 28'

$\forall w\,\mathbf{\exists y}\,\mathbf{(}\,(P(w)\rightarrow Q(w,y)) \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))\,\mathbf{)}$

PK 28

$\forall w\,\exists y\,\mathbf{\exists z}\,\mathbf{(}\,(P(w)\rightarrow Q(w,y)) \wedge (R(x,z)\rightarrow P(x))\,\mathbf{)}$

**På nästa sida finns lösningen med kommentarer/förklaringar**

**Från tentamen 2000-02-14:**

**Uppgift 3.** Skriv på prenex normalform. Endast bifogade PK-regler får användas. **(3p)**

$$\forall x\,(P(x)\rightarrow\exists y\, Q(x, y)) \wedge (\forall z\, R(x,z)\rightarrow P(x))$$

| **Lösning** | **Kommentar** |
|---|---|
| Huvudmålet är att få en formel på formen | |
| □□□ ( $\alpha \wedge \beta$ ) | □ betyder en kvantorförekomst |
| Delmål: Skapa □□ $\alpha \wedge$ □ $\beta$ | |
| $\forall x\,(\mathbf{P(x)\rightarrow\exists y\, Q(x, y)}) \wedge (\forall z\, R(x,z)\rightarrow P(x))$ | Vi börjar med den vänstra delen<br>$\forall x$ är redan utflyttad, så vi ska nu |
| PK 30 | plocka fram $\exists y$ |
| $\forall x\,(\mathbf{\exists y\,(P(x)\rightarrow Q(x, y))}) \wedge (\forall z\, R(x,z)\rightarrow P(x))$ | Man brukar inte ha med alla parenteser,<br>så jag tar bort ett par: |
| $\forall x\,\exists y\,(P(x)\rightarrow Q(x, y)) \wedge (\forall z\, R(x,z)\rightarrow P(x))$ | Nu har vi fixat □□ $\alpha$ |
| PK 27 | Dags att ta itu med högra delen |
| $\forall x\,\exists y\,(P(x)\rightarrow Q(x, y)) \wedge (\mathbf{\exists z\,(}\, R(x,z)\rightarrow P(x)\,\mathbf{)})$ | |
| | Jag tar bort parenteserna |
| $\forall x\,\exists y\,(P(x)\rightarrow Q(x, y)) \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))$ | |
| | Nu har vi uppnått □□ $\alpha \wedge$ □ $\beta$ |
| (Jag lade till parenteser för att få det tydligt) | Dags att plocka ut de tre kvantorerna,<br>så att □□□ ( $\alpha \wedge \beta$ ) uppnås |
| $\mathbf{\forall x\,(}\,\exists y\,(P(x)\rightarrow Q(x, y))\,\mathbf{)} \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))$ | Vi försöker börja med $\forall x$ |
| (PK 24' ERROR) | x är fri i högra delen, så PK 24' fung. ej |
| PK 4 | Använd PK 4 först |
| $\mathbf{\forall w\,(}\,\exists y\,(P(\mathbf{w})\rightarrow Q(\mathbf{w}, y))\,\mathbf{)} \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))$ | |
| | *NU* fungerar PK 24' ! |
| PK 24' | |
| $\forall w\,\mathbf{(}\;\exists y\,(P(w)\rightarrow Q(w, y)) \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))\;\mathbf{)}$ | |
| | Dags att flytta ut $\exists y$ |
| PK 28' | |
| $\forall w\,\exists y\,\mathbf{(}\;(P(w)\rightarrow Q(w, y)) \wedge \exists z\,(R(x,z)\rightarrow P(x))\;\mathbf{)}$ | |
| | Dags att flytta ut $\exists z$ |
| PK 28 | |
| $\forall w\,\exists y\,\exists z\,\mathbf{(}\;(P(w)\rightarrow Q(w, y)) \wedge (R(x,z)\rightarrow P(x))\;\mathbf{)}$ | **NU ÄR DET FÄRDIGT !** |