Naturlig deduktion i satslogiken

Ett bevissystem syftar till att beskriva **hur bevis byggs**. Men observera att ett bevissystem för satslogiken bara har ambitionen att beskriva hur orden "och", "eller", "icke", "om så" och "om och endast om" används i beviskonstruktion.

Det **bevissystem** för satslogiken som presenteras nedanför kallas för **naturlig deduktion** (betecknas SD i Hansens bok). Först en fundamental beteckning som avser att uttrycka **att** (men inte hur) bevis för satser kan användas för att bevisa satser.

Vi kommer att skriva

$$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi \qquad (1)$$

alternativt

$$\Gamma \vdash \varphi$$

för att uttrycka att φ kan bevisas med hjälp av bevis för noll eller flera av formlerna i $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$.

Beteckningen ovanför beskriver alltså **att** men **inte hur** φ kan bevisas, givet att man har bevis för vissa satser. I själva bevissystemet (se nedanför) beskrivs "**hur**". Och nämnda beskrivning har en rekursiv karaktär (bevisreglerna är rekursiva).

Basfall (ger den rekursiva definitionen en botten):

$\varphi \vdash \varphi$

"Om man har ett bevis för φ, så kan man använda det för att bevisa φ."

Rekursiva bevisregler (här finns beskrivningen av "**hur**"):

Introduktionsregler (I) som beskriver hur bevis för sammansatta satser byggs med hjälp av bevis för enklare satser.

Eliminationsregler (E) som beskriver hur bevis för sammansatta satser kan användas för att ge bevis för enklare satser.

($\wedge$I) Om $\Gamma_1 \vdash \varphi$ och $\Gamma_2 \vdash \sigma$, så $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \varphi \wedge \sigma$.

Denna regel brukar sammanfattas med $\dfrac{\varphi \quad \sigma}{\varphi \wedge \sigma}$

"Har man både bevisat φ och σ, så har man bevisat $\varphi \wedge \sigma$. Notera att vi inte säger någonting om hur bevisen av φ respektive σ konstrueras."

($\wedge$E) Om $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma$, så $\Gamma \vdash \varphi$, och om $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma$, så $\Gamma \vdash \sigma$.

Kortfattat $\dfrac{\varphi \wedge \sigma}{\varphi}$ $\qquad \dfrac{\varphi \wedge \sigma}{\sigma}$

"Har man bevisat $\varphi \wedge \sigma$, så har man både bevisat φ och σ."

($\longrightarrow$I) Om $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$, så $\Gamma \vdash \varphi \longrightarrow \sigma$.

Kortfattat $\dfrac{\left[\begin{array}{l}\varphi \\ \vdots \\ \sigma\end{array}\right.}{\varphi \longrightarrow \sigma}$

"Kan man bevisa σ givet ett hypotetiskt bevis för φ, så har man bevisat $\varphi \longrightarrow \sigma$." Klammern uttrycker att det som står inuti klammern är **lokala** bevis inuti beviset av $\varphi \longrightarrow \sigma$. Dessa lokala bevis får **icke** användas **utanför** klammern, eftersom de bygger på ett hypotiskt bevis för φ. Däremot får globala bevis användas inuti klammern.

($\longrightarrow$E) Om $\Gamma_1 \vdash \varphi \longrightarrow \sigma$ och $\Gamma_2 \vdash \varphi$, så $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \sigma$

Kortfattat $\dfrac{\varphi \longrightarrow \sigma \quad \varphi}{\sigma}$

"Har man både bevisat $\varphi \longrightarrow \sigma$ och φ, så har man bevisat σ." Denna bevisregel uttrycker det som alltsedan antiken har betraktats som ett vedertaget sätt att tänka (Modus Ponens).

EXEMPEL 1 $\quad A \wedge B \longrightarrow C, \quad D \longrightarrow A, \quad B \wedge F \;\vdash\; D \longrightarrow C$

1	$A \wedge B \longrightarrow C$	P
2	$D \longrightarrow A$	P
3	$B \wedge F$	P
4	B	Av 3, ($\wedge$ E)
5	D	P
6	A	Av 2, 5, ($\longrightarrow$E)
7	$A \wedge B$	Av 6, 4, ($\wedge$ I)
8	C	Av 1, 7, ($\longrightarrow$ E)
9	$D \longrightarrow C$	Av 5 – 8, ($\longrightarrow$ I)

($\vee$I) Om $\Gamma \vdash \varphi$, så $\Gamma \vdash \varphi \vee \sigma$, och om $\Gamma \vdash \sigma$, så $\Gamma \vdash \varphi \vee \sigma$.

Kortfattat $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \sigma}$ $\qquad \dfrac{\sigma}{\varphi \vee \sigma}$

"Har man bevisat minst en av φ och σ, så har man bevisat $\varphi \vee \sigma$."

($\vee$E) Om $\Gamma_1 \vdash \sigma \vee \tau$ och dessutom $\Gamma_2 \vdash \sigma \to \varphi$ samt $\Gamma_3 \vdash \tau \to \varphi$, så $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \varphi$.

Kortfattat $\dfrac{\sigma \vee \tau \quad \sigma \to \varphi \quad \tau \to \varphi}{\varphi}$

"Har man bevisat $\sigma \vee \tau$ och (i) $\sigma \to \varphi$ samt (ii) $\tau \to \varphi$, så har man bevisat φ." Denna bevisregel är en formalisering av s.k. fallbevis.

EXEMPEL 2 $\quad \varphi \vee \sigma \;\vdash\; \sigma \vee \varphi$

1	$\varphi \vee \sigma$	P
2	φ	P
3	$\sigma \vee \varphi$	Av 2, ($\vee$ I)
4	$\varphi \longrightarrow \sigma \vee \varphi$	Av 2, 3, ($\longrightarrow$ I)
5	σ	P
6	$\sigma \vee \varphi$	Av 5, ($\vee$ I)
7	$\sigma \longrightarrow \sigma \vee \varphi$	Av 5, 6, ($\longrightarrow$ I)
8	$\sigma \vee \varphi$	Av 1, 4, 7, ($\vee$ E)

($\perp$ I) Om $\Gamma_1 \vdash \varphi$ och $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$, så $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \perp$

Kortfattat $\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}$

"Har man både bevisat φ och $\neg\varphi$, så har man fått en motsägelse." Symbolen $\perp$ (som uttalas botten, falsum eller absurdum) representerar det (genom)falska. Dess semantiska motsvarighet är kontradiktion.

($\neg$I) Om $\Gamma, \varphi \vdash \perp$, så $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Kortfattat $\dfrac{\left[\begin{array}{l}\varphi \\ \vdots \\ \perp\end{array}\right.}{\neg\varphi}$

"Om ett hypotetiskt bevis för φ kan bevisas leda till en motsägelse, så har man bevisat $\neg\varphi$."

EXEMPEL 3 $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

1	φ	*P*
2	$\neg\varphi$	*P*
3	$\bot$	Av 1, 2, $(\bot\ \mathrm{I})$
4	$\neg\neg\varphi$	Av 2, 3, $(\neg\ \mathrm{I})$

EXEMPEL 4 $(\varphi \longrightarrow \sigma) \vdash (\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi)$

1	$\varphi \longrightarrow \sigma$	*P*
2	$\neg\sigma$	*P*
3	φ	*P*
4	σ	Av 1, 3, $(\longrightarrow \mathrm{E})$
5	$\bot$	Av 2, 4, $(\bot\ \mathrm{I})$
6	$\neg\varphi$	Av 3 – 5, $(\neg\ \mathrm{I})$
7	$\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi$	Av 2 – 6, $(\longrightarrow \mathrm{I})$

$(\neg\mathrm{E})$ Om $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, så $\Gamma \vdash \varphi$.

Kortfattat $\dfrac{\left[\begin{array}{l}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}\right.}{\varphi}$

"Om ett hypotetiskt bevis för $\neg\varphi$ kan bevisas leda till en motsägelse, så har man bevisat φ." Ovanstående två regler (främst det senare) formaliserar "motsägelsebeviset" (Reductio Ad Absurdum RAA)

EXEMPEL 5 $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

1	$\neg\neg\varphi$	*P*
2	$\neg\varphi$	*P*
3	$\bot$	Av 1, 2, $(\bot\ \mathrm{I})$
4	φ	Av 2, 3, $(\neg\ \mathrm{E})$

$(\longleftrightarrow\mathrm{I})$ Om $\Gamma_1 \vdash \varphi \longrightarrow \sigma$ och $\Gamma_2 \vdash \sigma \longrightarrow \varphi$, så $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \varphi \longleftrightarrow \sigma$.

Kortfattat $\dfrac{\varphi \longrightarrow \sigma \quad \sigma \longrightarrow \varphi}{\varphi \longleftrightarrow \sigma}$

"Har man bevisat både $\varphi \longrightarrow \sigma$ och $\sigma \longrightarrow \varphi$, så har man bevisat $\varphi \longleftrightarrow \sigma$."

$(\longleftrightarrow\mathrm{E})$ Om $\Gamma \vdash \varphi \longleftrightarrow \sigma$, så $\Gamma \vdash \varphi \longrightarrow \sigma$, och om $\Gamma \vdash \varphi \longleftrightarrow \sigma$, så $\Gamma \vdash \sigma \longrightarrow \varphi$.

Kortfattat $\dfrac{\varphi \longleftrightarrow \sigma}{\varphi \longrightarrow \sigma} \qquad \dfrac{\varphi \longleftrightarrow \sigma}{\sigma \longrightarrow \varphi}$

"Har man bevisat $\varphi \longleftrightarrow \sigma$, så har man bevisat både $\varphi \longrightarrow \sigma$ och $\sigma \longrightarrow \varphi$."

Lägg märke till att $\sigma \vdash \varphi$ omm $\vdash \sigma \longrightarrow \varphi$. (Se definitionen av "$\vdash$" samt introduktionsregeln för "$\longrightarrow$".)

EXEMPEL 6 $\vdash (\varphi \longrightarrow \sigma) \longleftrightarrow (\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi)$

Om vi kunde ge två bevis, säg BEVIS 1 för $(\varphi \longrightarrow \sigma) \longrightarrow (\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi)$ och BEVIS 2 för $(\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \sigma)$, så vore allting klart:

1	$(\varphi \longrightarrow \sigma) \longrightarrow (\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi)$	BEVIS 1
2	$(\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \sigma)$	BEVIS 2
3	$(\varphi \longrightarrow \sigma) \longleftrightarrow (\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi)$	Av 1, 2, $(\longleftrightarrow \mathrm{I})$

Enligt har vi (se exempel 4) redan givit BEVIS 1. Och BEVIS 2 kan göras nästan likadant. Se nedanför ...

$\vdash (\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \sigma)$

1	$\neg\sigma \longrightarrow \neg\varphi$	*P*
2	φ	*P*
3	$\neg\sigma$	*P*
4	$\neg\varphi$	Av 1, 3, $(\longrightarrow \mathrm{E})$
5	$\bot$	Av 2, 4, $(\bot\ \mathrm{I})$
6	σ	Av 3 – 5, $(\neg\ \mathrm{I})$
7	$\varphi \longrightarrow \sigma$	Av 2 – 6, $(\longrightarrow \mathrm{I})$

Det senaste exemplet leder oss till begreppet "härledd regel" ...

Härledda regler

På motsvarande sätt som man i programmering kan "anropa" redan skrivna program när man skriver nya dito, är det tillåtet att "anropa" redan gjorda bevis när man skriver nya bevis. De anropade bevisen – som kallas för **härledda regler** – namnges i bevisens kommentarkolumn på samma platser som bevisreglerna annars namnges. Vissa bevis är mer användbara som härledda regler än andra. Här följer några sådana ...

EXEMPEL 7 $\neg(\varphi \vee \sigma) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\sigma$ (*De Morgans lag*)

1	$\neg(\varphi \vee \sigma)$	*P*
2	φ	*P*
3	$\varphi \vee \sigma$	Av 2, $(\vee\ \mathrm{I})$
4	$\bot$	Av 1, 3, $(\bot\ \mathrm{I})$
5	$\neg\varphi$	Av 2 – 4, $(\neg\ \mathrm{I})$
6	σ	*P*
7	$\varphi \vee \sigma$	Av 6, $(\vee\ \mathrm{I})$
8	$\bot$	Av 1, 7, $(\bot\ \mathrm{I})$
9	$\neg\sigma$	Av 6 – 8, $(\neg\ \mathrm{I})$
10	$\neg\varphi \wedge \neg\sigma$	Av 5, 9, $(\wedge\ \mathrm{I})$

EXEMPEL 8 $\vdash \varphi \lor \neg\varphi$ (*Det uteslutna tredje*)

1	$\neg(\varphi \lor \neg\varphi)$	*P*
2	$\neg\varphi$	*P*
3	$\varphi \lor \neg\varphi$	Av 2, ($\lor$ I)
4	$\bot$	Av 1, 3, ($\bot$ I)
5	φ	Av 2 – 4, ($\neg$ E)
6	$\varphi \lor \neg\varphi$	Av 5, ($\lor$ I)
7	$\bot$	Av 1, 6, ($\bot$ I)
8	$\varphi \lor \neg\varphi$	Av 1 – 7, ($\neg$ E)

Alternativt bevis med hjälp av De Morgan ...

1	$\neg(\varphi \lor \neg\varphi)$	*P*
2	$\neg\varphi \land \neg\neg\varphi$	Av 1, De Morgan
3	$\neg\varphi$	Av 2, ($\land$ E)
4	$\neg\neg\varphi$	Av 2, ($\land$ E)
5	$\bot$	Av 3, 4, ($\bot$ I)
6	$\varphi \lor \neg\varphi$	Av 1 – 5, ($\neg$ E)

EXEMPEL 9 $\bot \vdash \sigma$ (*Ex falso sequitur quodlibet* "från det falska kan vad som helst bevisas")

1	$\bot$	*P*
2	$\neg\sigma$	*P*
3	$\bot$	1, (atomära beviset)
4	σ	Av 2 – 3, ($\neg$ E)

EXEMPEL 10 $\varphi \lor \sigma, \neg\varphi \vdash \sigma$ (*Disjunktiva syllogismen*)

1	$\varphi \lor \sigma$	*P*
2	$\neg\varphi$	*P*
3	φ	*P*
4	$\bot$	Av 2, 3, ($\bot$ I)
5	σ	Av 4, (*ex falso sequitur quodlibet*)
6	$\varphi \longrightarrow \sigma$	Av 3 – 5, ($\longrightarrow$ I)
7	σ	*P*
8	σ	Av 7, (atomära beviset)
9	$\sigma \longrightarrow \sigma$	Av 7 – 8, ($\longrightarrow$ I)
10	σ	Av 1, 6, 9, ($\lor$ E)

EXEMPEL 11 $\varphi \longrightarrow \sigma \vdash \neg\varphi \lor \sigma$ (*Elimination av implikation*)

1	$\varphi \longrightarrow \sigma$	*P*
2	$\neg\varphi \lor \varphi$	Det uteslutna tredje
3	$\neg\varphi$	*P*
4	$\neg\varphi \lor \sigma$	Av 3, ($\lor$ I)
5	$\neg\varphi \longrightarrow \neg\varphi \lor \sigma$	Av 3 – 4, ($\longrightarrow$ I)
6	φ	*P*
7	σ	Av 1, 6, ($\longrightarrow$ E)
8	$\neg\varphi \lor \sigma$	Av 7, ($\lor$ I)
9	$\varphi \longrightarrow \neg\varphi \lor \sigma$	Av 6 – 8, ($\longrightarrow$ I)
10	$\neg\varphi \lor \sigma$	Av 2, 5, 9, ($\lor$ E)

Strategier vid beviskonstruktion

Antag att Du ska konstruera ett bevis för ...

1. $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \bot$

   Lösningsstrategi:

   Använd bevisregeln för "det falska" ($\bot$ I). **Illustration**: Bevis inuti det stora beviset i exempel 8.

2. $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ där φ är ospecificerad.

   Tre alternativa lösningsstrategier:

   (i) **Direkt bevis:** Plocka isär satserna $\psi_1, \ldots, \psi_n$ med hjälp av eliminationsregler så att φ "faller ut".
   Illustration: Beviset av C från premisserna $A \land B \longrightarrow C$, $D \longrightarrow A$, $B \land F$, D i Exempel 1.

   (ii) **Motsägelsebevis:** Med hjälp av bevisregeln ($\neg$ E).
   Illustration: Exempel 8.

   (ii) **Fallbevis:** Starta med regeln ($\lor$ E) om någon av premisserna ψ_k är en disjunktion. Om det senare inte är fallet kan man använda gratisdisjunktionen "*Det uteslutna tredje*" i motsvarande roll. **Illustration**: Exempel 10 och exempel 11.

3. $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \neg\varphi$

   Två alternativa lösningsstrategier:

   (i) **Motsägelsebevis:** Starta med regeln ($\neg$ I).
   Illustration: Exempel 3 och exempel 4.

4. $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi \,\square\, \sigma$, där $\square \in \{\land, \lor, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$

   Tre alternativa lösningsstrategier:

   (i) Starta med introduktionsregeln för "$\square$".

   (ii) **Motsägelsebevis:** Starta med regeln ($\neg$ E).
   Illustration: Exempel 5, 8 och 9.

   (iii) **Fallbevis:** Se 2.(ii). **Illustration**: Exempel 2.

Sundhet och fullständighet hos bevissystemet SD.

FULLSTÄNDIGHETSSATSEN $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi$

Sundhet:

$\Gamma \vdash \varphi \underset{*}{\Longrightarrow} \Gamma \vDash \varphi$ "Allt som kan bevisas (i SD) är sant."

* Följer av att varje bevisregel är sanningsbevarande.

Fullständighet:

$\Gamma \vdash \varphi \underset{**}{\Longleftarrow} \Gamma \vDash \varphi$ "Allt sant kan bevisas (i SD)."

** Svårare att bevisa än sundheten.