F5 Grundläggande sannolikhetslära forts.

Christian Tallberg

Avdelningen för Nationalekonomi/Statistik

Karlstads universitet

Oberoende händelser

- Två händelser A och B är oberoende (i sannolikhetsteoretisk mening) om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

- Oberoende innebär bland annat att

$$\begin{aligned} P(A\,|B) &= P(A\,|B^*) = P(A) \\ P(B\,|A) &= P(B\,|A^*) = P(B) \end{aligned}$$

Exempel: Ett symmetriskt mynt singlas två gånger.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \{(kr, kr), (kr, kl)\,(kl, kr)\,(kl, kl)\} \\ A &= \text{Klave i första kastet} \\ B &= \text{De två kasten ger samma resultat,} \\ & \quad ((kr, kr) \text{ eller } (kl, kl)) \\ C &= \text{Klave i båda kasten} \end{aligned}$$

a) Är händelserna A och B oberoende?

b) Är händelserna A och C oberoende?

Dessa sannolikheter är givna: $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.25$, $P(B\,|A) = 0.5$, $P(C\,|A) = 0.5$

Lösning a)

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B\,|A)\,P(A) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \\ P(A)\,P(B) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 = P(A \cap B) \end{aligned}$$

Händelserna A och B är oberoende. Dvs, informationen vi får från att händelsen A har inträffat *påverkar inte* sannolikheten för att händelsen B skall inträffa.

Lösning b)

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(C\,|A)\,P(A) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \\ P(A)\,P(C) &= 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \neq P(A \cap C) \end{aligned}$$

Händelserna A och C är inte oberoende. Dvs, informationen vi får från att händelsen A har inträffat *påverkar* sannolikheten för att händelsen C skall inträffa.

- OBS! Om A och B är oberoende, så är också A och B^* oberoende, A^* och B oberoende, och A^* och B^* oberoende.

Exempel: Låt $A =$ "Sexa i första kastet" och $B =$ "Sexa i andra kastet". Utfallet i andra kastet påverkas inte av utfallet i första kastet. A och B kan därför här antas vara oberoende. Vad är sannolikheten att inte få någon sexa vid två kast med en tärning?

$$P(A^* \cap B^*) = P(A^*)\,P(B^*) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

- Begreppet oberoende kan generaliseras till fler än två händelser

Exempel:

- Sannolikheten för minst en sexa vid fyra kast med en symmetrisk tärning.

$$\begin{aligned} P(\text{minst en sexa}) &= 1 - P(\text{ingen sexa}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518 \end{aligned}$$

- Sannolikheten för minst en dubbelsexa vid 24 kast med två symmetriska tärningar.

$$\begin{aligned} P(\text{minst en dubbelsexa}) &= 1 - P(\text{ingen dubbelsexa}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491 \end{aligned}$$

Exempel: Vi vet att $P(A) = 0.5$ och $P(B) = 0.2$. Vad är $P(A \text{ och } B)$, om A och B antas vara

a) disjunkta?

b) oberoende?

a) När A och B är *disjunkta*, är

$$P(A \cap B) = 0.$$

b) När A och B är *oberoende*, är

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1.$$

Exempel forts.: Vad är $P(A \cup B)$, om A och B antas vara

a) disjunkta?

b) oberoende?

Enligt *additionssatsen* gäller generellt att

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

a) När A och B är *disjunkta*, är

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.2 - 0 = 0.7.$$

b) När A och B är *oberoende*, är

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.2 - 0.1 = 0.6.$$

Satsen om total sannolikhet

I vissa problem känner vi den *betingade* sannolikheten för en händelse B, givet att en annan händelse A har respektive inte har inträffat. Vi kan då få den *obetingade* sannolikheten för B på följande sätt

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^* \cap B) \\ &= P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^*)\, P(A^*) \end{aligned}$$

Exempel:

En person har två paket spik där relativa frekvensen defekta är 0.01 resp 0.07. Hon väljer först ett paket på sådant sätt att sannolikheten att hon väljer paket 1 är 0.6 och sannolikheten att hon väljer paket 2 är 0.4. Ur det valda paketet väljer hon därefter slumpmässigt en spik.

a) Vad är sannolikheten att spiken är defekt? Låt händelsen $A =$Paket1 och händelsen $B =$ Defekt spik.

Enligt satsen om total sannolikhet är

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^* \cap B) \\ &= P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^*)\, P(A^*) \\ &= 0.01 \cdot 0.6 + 0.07 \cdot 0.4 \\ &= 0.006 + 0.028 = 0.034 \end{aligned}$$

- *Satsen om total sannolikhet*: Låt händelserna $A_1, A_2 ... A_n$ skall vara disjunkta och tillsammans fylla upp hela utfallsrummet. Då är

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \text{ och } B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i).$$

Exempel forts.: Den valda spiken var defekt! Vad är sannolikheten att den kommer från paket 1 resp. paket 2?

Enligt Bayes sats är

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{0.006}{0.034} = 0.1765 \\ P(A^*|B) &= \frac{P(B|A^*) P(A^*)}{P(B)} \\ &= \frac{0.028}{0.034} = 0.8235 \end{aligned}$$

Problemet i exemplet ovan är av följande typ:

- $A_1, A_2, ..., A_n$ är disjunkta händelser, vilka tillsammans fyller upp hela utfallsrummet.
- Vi känner $P(A_1), ..., P(A_n)$ samt $P(B|A_1), ..., P(B|A_n)$.
- Vi vill beräkna $P(A_1|B), ..., P(A_n|B)$.
- Vi tillämpar *Bayes sats* som (under villkoren ovan) säger att:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{P(B)},$$

där nämnaren beräknas enligt satsen om total sannolikhet,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i).$$

Kuriosa:

- $P(A_i)$ brukar kallas priorisannolikheten för $A_i, i = 1, .., n$.
- $P(A_i|B)$ brukar kallas aposteriorisannolikheten för $A_i, i = 1, .., n$.