Karlstads universitet
Matematik

TENTAMEN I MATEMATIK, ANALYS B1, 5 poäng, för MAB 200, 103, 104, 505.
2003 – 10 – 24, kl 08.15 – 13.15.

Hjälpmedel:	Bifogad formelsamling, miniräknare.	Maxpoäng: 24 p
Ansvariga lärare:	Bengt Alm, Ilie Barza	Godkänd: 12 p

Obs: Symbolhanterande räknare är ej tillåtna, d.v.s. de får inte kunna användas för att omforma algebraiska uttryck och inte innehålla *Derive* eller andra jämförbara program. Redovisade lösningar får ej hänvisa till uppgifter som fåtts från räknare såsom färdiga integralberäkningar, extremvärdesbestämningar, ekvationslösningar, etc.

1. Låt (a,b) vara en inre kritisk (stationär) punkt till funktionen $f(x,y)$, och låt de partiella andraderivatorna vara kontinuerliga nära punkten (a,b).
   Visa att $f_{11}(a,b)<0$ och $f_{11}(a,b)\cdot f_{22}(a,b) - (f_{12}(a,b))^2>0 \Rightarrow f(x,y)$ har lokalt maximum i punkten (a,b). (3 p)

2. Funktionen $f(x,y)=\left(\dfrac{2x}{y}\right)^{xy}$ är given.
   a) Beräkna riktningsderivatan till $f(x,y)$ i punkten $(x,y)=(1,2)$ och riktningen $3\mathbf{i}+\mathbf{j}$. (1.5p)
   b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(x,y,z)=(1,2,1)$. (0.5p)

3. Beräkna $\displaystyle\iint_D xy\ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$, där $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ (3 p)

4. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x,y)=(1-x^2+y^2)e^{x-y}$ antar på det slutna område som definieras av olikheterna $y\le 2-x$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. (3 p)

5. Låt C vara kurvan $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=2t$ från punkten $(0,0,0)$ till punkten $(2\pi,0,4\pi)$.
   a) Beräkna $\displaystyle\int_C z\,ds$. (2 p)
   b) Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F}=xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+xy\,\mathbf{k}$. (2 p)

6. Beräkna det kortaste avståndet från origo till skärningslinjen mellan planen $x+y-z=3$ och $x-y+z=1$. (2 p)

7. a) Beräkna volymen av det område som innesluts av funktionsytorna $2z=8-x^2-2y^2$ och $z=\sqrt{x^2+2y^2}$. (2 p)
   b) Beräkna arean av den del av ytan $2z=8-x^2-2y^2$ som ligger inom den elliptiska cylindern $x^2+4y^2=4$. (2 p)

8. Visa att $\mathbf{F}=\left(ye^{xy}+ze^x,\ xe^{xy}+\sqrt{\dfrac{z}{y}},\ e^x+\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$ ger ett konservativt vektorfält.
   Beräkna därefter $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ då C ges av $\mathbf{r}(t)=(\ln t, t, 2t)$, $1\le t\le 2$. (3 p)