Karlstads universitet
Matematik

Tentamen i matematik, MAB200, 103, 104
ANALYS B1, 5 poäng
2004-03-26, kl. 14.00-19.00

Lärare: Sorina Barza, tel. 700 1888
Hjälpmedel: Miniräknare (ej symbolhanterande) samt bifogad formelsamling. Max: 24 poäng. Godkänd 12 poäng.

1. Visa att om f är differentierbar i en punkt (a, b) och $\nabla f(a, b) \neq 0$ då är $\nabla f(a, b)$ en normal vektor till nivåkurvan $z = f(a, b)$ i punkten (a, b). 3p

2. Låt
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+x^2y^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$
   (a) Visa att funktionen f inte är kontinuerlig i punkten $(0, 0)$. 1p
   (b) Beräkna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$. 0.5p
   (c) Beräkna $f'_x(1, 1)$. 1p

3. Visa att funktionen $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ inte är differentierbar i punkten $(0, 0)$. 1.5p

4. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = 2 - 3x^2 + y^2 - 3\ln(1 + x^2 + y^2)$ antar på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. 3p

5. Beräkna
$$\iint_D \cos y^2 dxdy,$$
   där D är det ändliga området begränsat av $y-$axeln, $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ och $y = x$. 3p

6. (a) Beräkna
$$\iiint_K z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz,$$
   där K är kroppen begränsad av planet $z = 1$ och ytan $z = x^2 + y^2$. 2p
   (b) Beräkna arean av den yta som begränsar den ovannämnda kropp. 2p

7. Låt $\overrightarrow{F} = (2xye^{x^2+y}, (1 + y)e^{x^2+y})$ vara ett vektorfält definierat på $\mathbb{R}^2$ och C vara kurvan $x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t, t \in [0, \pi]$.

   (a) Visa att $\overrightarrow{F}$ är ett konservativt vektorfält och beräkna
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$
   3p

(b) Beräkna längden av kurvan $\mathcal{C}$. 2p

8. Låt $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$ vara ett vektorfält definierat på $\mathbb{R}^3$och $\mathcal{S}$ vara utsidan av sfären

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \sin u \cos v \\ y(u,v) &= \sin u \sin v \\ z(u,v) &= \cos u, \end{aligned}$$

där $u \in [0, \pi)$ och $v \in [0, 2\pi)$. Beräkna flödet av $\overrightarrow{F}$ ut genom sfären $\mathcal{S}$. 2p