Karlstads universitet
Matematik

TENTAMEN I MATEMATIK , ANALYS B1 , 5 poäng , för MAB 200, 103, 104, 412, 505 .
2004 – 10 – 25 , kl 08.15 – 13.15 .

Hjälpmedel:	Bifogad formelsamling, miniräknare.	Maxpoäng: 24 p
Ansvariga lärare:	Bengt Alm , Sorina Barza	Godkänd: 12 p

Obs: Symbolhanterande räknare är ej tillåtna, d.v.s. de får inte kunna användas för att omforma algebraiska uttryck och inte innehålla *Derive* eller andra jämförbara program. Redovisade lösningar får ej hänvisa till uppgifter som fåtts från räknare såsom färdiga integralberäkningar, extremvärdesbestämningar, ekvationslösningar, etc.

1. a) Definiera den partiella derivatan $f_1(x,y)$ till funktionen $z=f(x,y)$, samt beräkna utifrån denna definition $f_1(3,1)$ då $f(x,y)=x^2y$. (1 p)

   b) Bevisa satsen $D_{\hat{u}}f(a,b)=\nabla f(a,b)\cdot\hat{u}$, där $|\hat{u}|=1$ och $f(x,y)$ är deriverbar i punkten (a,b), genom att utgå från definitionerna av $D_{\hat{u}}f(a,b)$ och $\nabla f(a,b)$. (2 p)

2. Funktionen $f(x,y)=\sqrt{x(x+y)}$, $x^2+xy>0$ är given.

   a) Beräkna riktningsderivatan till $f(x,y)$ i punkten $(x,y)=(1,3)$ och riktningen $\mathbf{i}-\mathbf{j}$. (1.5p)

   b) Beräkna maximala värdet på riktningsderivatan till $f(x,y)$ i punkten $(x,y)=(1,3)$. (0.5p)

   c) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(x,y,z)=(1,3,2)$. (0.5p)

   d) Bestäm ekvationen för normallinjen till $z=f(x,y)$ i punkten $(x,y,z)=(1,3,2)$. (0.5p)

3. Beräkna $\iint_D x^2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, där $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 3\ ,\ x-y\le 0\}$ (3 p)

4. Bestäm det största och minsta värdet som funktionen $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-2y$ antar på den slutna triangeln med hörn i $(0,0)$, $(3,0)$ och $(0,3)$. (3 p)

5. Beräkna $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F}=(2y^3-x^2y)\mathbf{i}+(x^3-2xy^2)\mathbf{j}$ och C är övre halvan av ellipsen $x^2+4y^2=4$ från punkten $(2,0)$ till punkten $(-2,0)$ (3 p)

6. a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas av halvsfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $z\ge0$ och cylindern $x^2+y^2=a^2$. (2 p)

   b) Beräkna arean av den del av halvsfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $z\ge0$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2=a^2$. (2 p)

7. Genom ekvationen $2x^2-y^2+z^2=e^z$ definieras implicit en funktion $z=z(x,y)$ i en omgivning till punkten $(x,y)=(1,1)$ så att $z(1,1)=0$.
   Bestäm Taylorpolynomet av grad två till denna funktion i punkten $(x,y)=(1,1)$. (2 p)

8. Beräkna $\iint_T \frac{(2(y-x)-1)^3}{(3x-2y)^2}\,dxdy$; där T är en sluten triangel med hörn i punkterna $(3,4)$, $(5,7)$ och $(7,9)$. (3 p)