Karlstads universitet
Matematik

Omtentamen i matematik, MAB 200, 103, 104
ANALYS B1, 5 poäng
2005-08-27, kl. 9.00.-14.00

Lärare: Sorina Barza, tel. 700 1888
Hjälpmedel: Miniräknare (ej symbolhanterande) samt bifogad formelsamling. Max: 24 poäng. Godkänd 12 poäng.

1. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator av första ordning i omgivningen av en punkt med koordinaterna (a, b) och med kontinuerliga andraordningens derivator i punkten (a, b).Visa att $f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b)$. f_{12}, f_{21}är de blandade partiella derivatorna av andra ordning till f. 3p

2. (a) Låt F vara en två gånger derivarbar funktion av en variabel. Visa att $u(x, y) = xy + xF(\frac{y}{x})$ satisfierar den partiella differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xy + u.$$
1.5p

   (b) Visa att gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{|xy|}}{x}$ inte existerar. 1.5p

3. Bestäm med hjälp av Lagrangemultiplikatorsmetoden, vilka punkter på ytan $z = 5 - xy$ ligger närmast origo. 3p

4. Punkterna $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 0)$ ligger i ett plan som tangerar ytan $x^2 + yz + z^2 = 1$. Bestäm tangeringspunktens koordinater. 3p

5. Beräkna dubbelintegralen
$$\int_0^{\pi} \left(\int_x^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y} dy \right) dx.$$
2p

6. Beräkna trippellintegralen

$$\iiint_K y\,dx\,dy\,dz$$

där K är tetraedern med hörn i punkterna $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$. 3p

7. Beräkna $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = e^{x-y}x\mathbf{i}+e^{x-y}y\mathbf{j}$ och $C : \mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} - 3\sin t\mathbf{j}$, $t \in [0,\pi]$. Skissera också kurvan C. 2p

8. Beräkna ytintegralen av masstyp

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$$

då ytan S är den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ som ligger inom cylindern $x^2+y^2 \leq 1$, $z \geq 0$. 2.5p

9. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

då vektorfältet $\mathbf{F} = (z,y,x)$ och S är den del av planet $x+y+z = 2$ som ligger i första oktanden. Enhetsnormalen $\mathbf{N}$ har positiva komponenter. 2.5p