

Karlstads universitet
Avdelningen för matematik

**Tentamen i matematik, Analys B1, 5 poäng,
för MAB 201, MAB 103 och MAB 104. 2006-08-26 kl. 9.00-14.00**
Ansvarig lärare: Niclas Bernhoff (2024). Max: 24p VG: 18p G: 12p
Hjälpmedel: Miniräknare samt bifogad formelsamling.
MOTIVERA DINA LÖSNINGAR NOGGRANT.

SYMBOLHANTERANDE MINIRÄKNARE ÄR FÖRBJUDET!

1. a) Låt \mathbf{F} vara ett glatt (smooth) vektorfält definierat på ett område D . **(2p)**

Visa att om \mathbf{F} är konservativt på D , så är $\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje styckvis
glatt, sluten kurva C_0 i D .

- b) Hur lång är kurvan som ges av $\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 4 \cos t \\ z(t) = 4 \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 4\pi$, ? **(1p)**

2. Låt $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - 1}$, ($x \neq 1$).

- a) Bestäm om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ existerar. Ange i så fall också
dess värde. **(1p)**

- b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $z = f(x, y)$ kring punkten
 $(x, y) = (3, 1)$. **(2p)**

3. Beräkna dubbelintegralen **(3p)**

$$\iint_D \sin(\pi x^3) - \sin\left(\frac{\pi y}{x^2}\right) dx dy,$$

där D är ytan given av $0 \leq \sqrt{y} \leq x \leq 1$.

4. Bestäm största och minsta värdet för funktionen **(3p)**

$$f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - 3x}$$

på den slutna triangelytan med hörn i $(1, 1)$, $(2, 1)$ och $(1, 2)$.

5. Transformera differentialekvationen **(3p)**

$$x^2 g''_{xx} = y^2 g''_{yy}, \quad (x > 0, y > 0),$$

genom att införa de nya variablerna $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ (dvs. uttryck differentialekvationen med hjälp av de nya variablerna u och v).

6. Ekvationen $2yz^2 - 6x^2y^3 + y^2z = 0$ definierar nära punkten $(-1, 2, 3)$,
 z som en funktion av x och y , $z = f(x, y)$. Motivera varför och bestäm
också $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(-1, 2)} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(-1, 2)}$. **(1.5p)**

var god vänd

7. Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för vektorfältet **(2.5p)**

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y, y),$$

där C är den del av enhetscirkeln, genomlupen moturs, som förbinder punkten $A = (1, 0)$ med punkten $B = (-1, 0)$.

8. a) Beräkna volymen av den kropp som innesluts av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$. **(2.5p)**
- b) Bestäm arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ som ligger inuti paraboloiden $z = x^2 + y^2$. **(2.5p)**

Lycka till!